



## **PRÁCTICA Nº 3**

### ***Determinación del horóptero longitudinal***

#### **OBJETIVO:**

Obtención del horóptero longitudinal para una distancia determinada de fijación utilizando el método del plano frontoparalelo aparente (PFPA). Análisis matemático del horóptero.

#### **MATERIAL NECESARIO:**

- Mentonera;
- *Horopter apparatus* para visión intermedia;
- Diafragma;

#### **FUNDAMENTO TEÓRICO:**

Los objetos cuyas imágenes se proyectan sobre la fóvea se perciben como que están enfrente y en línea recta de nosotros. Por tanto la posición de la fóvea determina la Dirección Visual Principal (DVP). Todos los objetos asociados a direcciones visuales secundarias, o sea que no son objetos de fijación, se percibirán desplazados lateralmente. Esto se debe a que cada fotorreceptor tiene biunívocamente asociada una única dirección visual (línea visual).

Si la percepción de dos puntos T (foveal) y P (extrafoveal) es única, es porque los puntos retinianos asociados (las dos fóveas para T y dos puntos extrafoveales para P) están conectados a lo largo de los caminos visuales, de manera que al ser estimulados

simultáneamente “interpretamos” que las dos proyecciones monoculares en el espacio objeto coinciden en el mismo punto. Definimos entonces **correspondencia retiniana** a la relación entre puntos retinianos del OD y OI, que al ser estimulados simultáneamente dan lugar a una percepción haplópica (no doble). A las parejas de puntos retinianos, las dos fóveas y demás pares asociados a un punto P cualquiera visto “no doble”, se denominan **puntos correspondientes**.

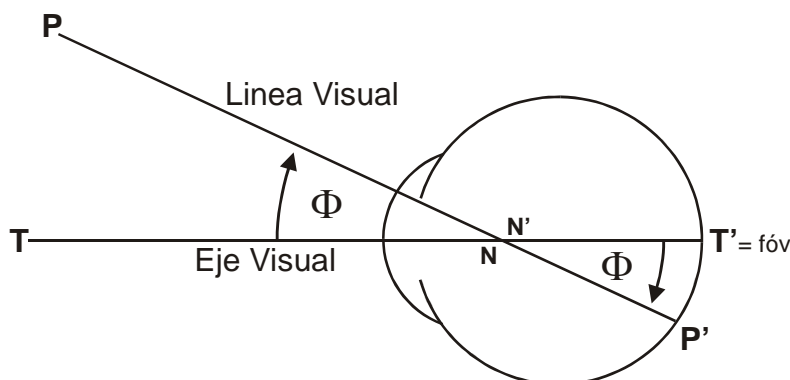


Figura 1: Correspondencia Retiniana

El horóptero se define como el lugar geométrico de los puntos del espacio objeto que dan lugar a una misma dirección visual para ambos ojos sin necesidad de que se produzcan movimientos oculares de tipo fusional. Si relacionamos el horóptero con los puntos retinianos correspondientes, puede también definirse como el lugar geométrico de aquellos puntos del espacio objeto cuyas imágenes se forman sobre pares de puntos retinianos correspondientes. Más llanamente, el horóptero puede identificarse como el *campo haplópico simultáneo*, es decir, una zona del campo visual binocular donde no se ve doble manteniendo la fijación. La determinación del horóptero empírico longitudinal es muy importante para estudiar la visión binocular. Sin embargo, su utilización en la práctica optométrica y oftalmológica ha estado muy restringida, fundamentalmente debido al desconocimiento de sus posibilidades y a la dificultad de su medida y análisis. Tan sólo en los últimos años se ha observado un resurgimiento de los trabajos que ven en el horóptero uno de los medios más sensibles y precisos para el estudio de la visión binocular.

Dado un punto de fijación  $T(0,d)$  situado en la línea media, el horóptero teórico puntual es una superficie tridimensional (Fig. 1), la cual puede descomponerse en dos secciones. Su intersección con el plano medio se conoce como *horóptero vertical*; mientras que su intersección con el plano de fijación se conoce como *horóptero empírico longitudinal*. Debido a que la correspondencia retiniana no es congruente (no es simétrica en los meridianos

retinianos), el horóptero longitudinal no es un círculo (no se corresponde con el llamado *círculo de Vieth-Müller* (CVM)). La desviación del Horóptero real respecto al CVM se conoce como *desviación de Hering-Hillebrand* (\*).

(\*) Igual ocurre con la forma teórica del horóptero vertical, la línea perpendicular al punto de fijación, cuya desviación se conoce como *desviación de Helmholtz*: el horóptero vertical empírico o real se inclina hacia los pies respecto al horóptero vertical teórico.

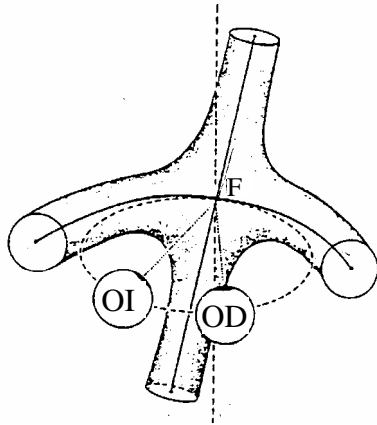


Figura 1: Representación tridimensional del horóptero para un punto de fijación sobre la línea media. Las líneas discontinuas representan las formas teóricas o geométricas del horóptero. Las líneas continuas representan las formas empíricas o reales del horóptero. Se ven claramente las desviaciones de Hering-Hillebrand (horóptero longitudinal) y de Helmholtz (horóptero vertical).

La forma del horóptero longitudinal varía con la distancia de fijación (Fig. 2), de forma que existe una distancia  $d_{ABA}$ , denominada *distancia abática*, a la que corresponde una línea recta como horóptero longitudinal.

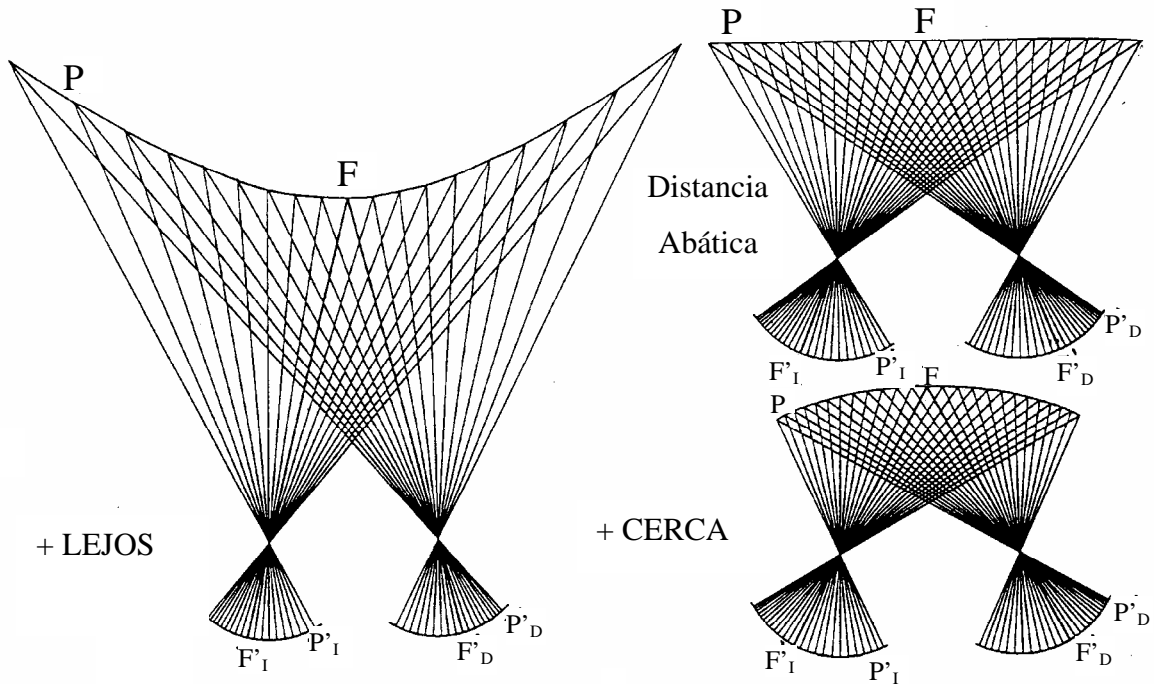


Figura 2: Demostración gráfica de la desviación de Hering-Hillebrand. Dado que la correspondencia retiniana no es congruente (simétrica): la excentricidad nasal es mayor que la excentricidad temporal para cada par de puntos retinianos correspondientes, aumentando esta diferencia con la excentricidad.

Para realizar un estudio cuantitativo del horóptero longitudinal, se puede suponer que se trata de una sección cónica cuya fórmula genérica es  $Ax^2 - Bxy + Cy^2 - Dy - E = 0$ . El origen de coordenadas utilizado está en medio de la línea que une las dos pupilas (Fig. 3). Los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  se calculan a partir de las expresiones siguientes:

$$A = 1 - \frac{Hd}{a(R_0 + 1)} \quad ; \quad B = \frac{(d^2 + a^2)(R_0 - 1)}{ad(R_0 + 1)} \quad ; \quad C = 1 + \frac{Ha}{d(R_0 + 1)} \quad (1)$$

$$D = \frac{d^2 - a^2}{d} + \frac{2Ha}{R_0 + 1} \quad ; \quad E = a^2 - \frac{Had}{R_0 + 1} \quad , \text{ siendo } a = \frac{dip}{2}$$

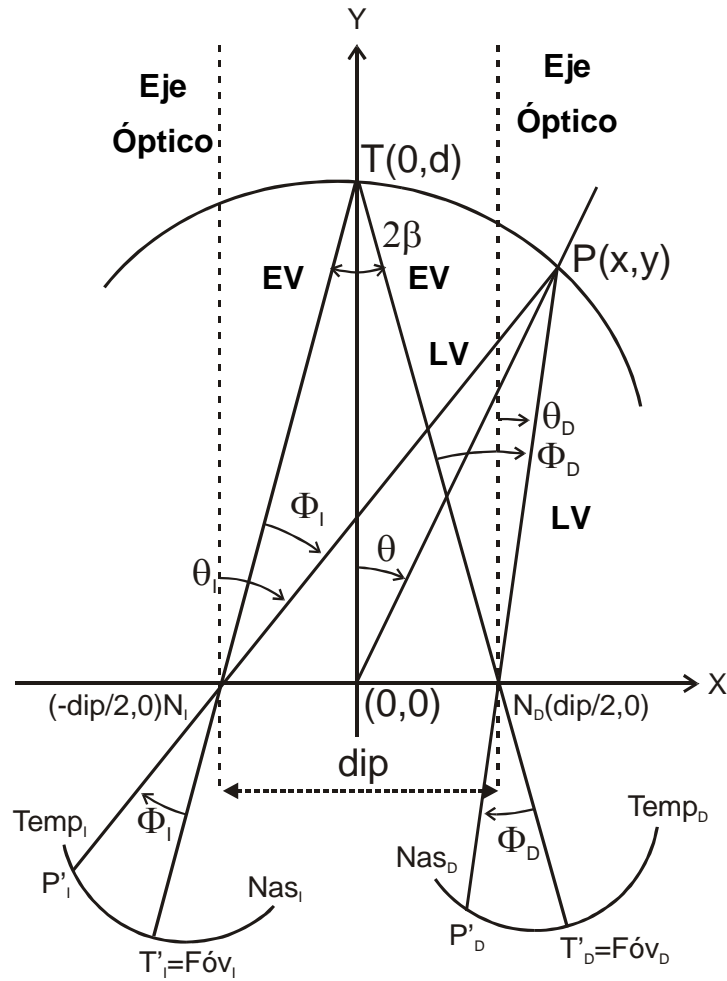


Figura 3: Esquema geométrico de las variables implicadas en el análisis matemático del horóptero empírico longitudinal como una cónica general.

- La variable  $H$  es la desviación de Hering-Hillebrand y representa el cociente entre la curvatura relativa del horóptero empírico longitudinal y la curvatura relativa del círculo de Vieth-Müller (CVM), de forma que cuando  $H = 0$ , se verifica que el horóptero longitudinal coincide con el CVM. Dependiendo del valor de  $H$  según el cociente  $dip/d$ , la forma de la cónica cambia drásticamente (Fig. 4), de forma que la distancia abática  $d_{ABA} = dip/H$ .
- La variable  $R_0 = y'_I/y'_D$  es el *grado de aniseiconía* del sujeto, o sea, el cociente entre el tamaño de las dos imágenes retinianas, de forma que en condiciones normales o ideales  $R_0 = 1$ .

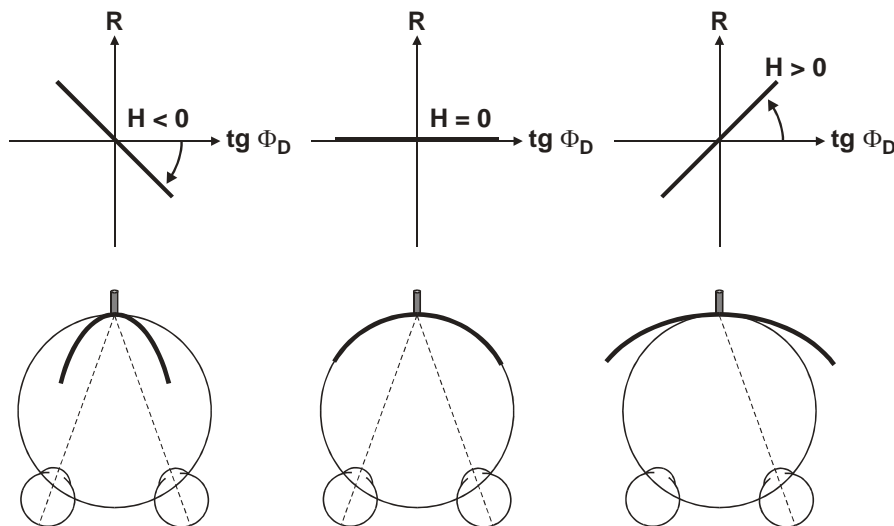


Figura 4: Forma del horóptero en función de la desviación de Hering-Hillebrand  $H$ . Izquierda:  $H < 0$ , horóptero dentro del CVM; centro:  $H = 0$ , horóptero = CVM; derecha:  $H > 0$ , horóptero fuera del CVM, con la posibilidad de llegar a ser cóncavo ( $\cup$ ).

**Análisis de Ogle:** Para simplificar el ajuste matemático por regresión de los datos experimentales del horóptero empírico longitudinal, Ogle (1950) propuso un cambio de variables que permite de manera fácil obtener las variables  $(H, R_0)$  de un sujeto. Si nos fijamos en la Figura 3, el punto de fijación  $T(0,d)$  presenta una convergencia simétrica  $C = 2\beta$ , y cada ojo, respecto su posición primaria, giraría  $\theta_I$  y  $\theta_D$  para fijarse en el punto  $P(x,y)$  del horóptero, marcado con la dirección visual  $\theta$ . Si el punto  $P$  pertenece al horóptero de  $T$ , esto quiere decir que las excentricidades  $\Phi_I$  y  $\Phi_D$  representan las posiciones angulares del par de puntos retinianos correspondientes  $P'_I$  y  $P'_D$ . Si fuera el caso de que el horóptero longitudinal es el CVM,  $\Phi_I = \Phi_D$ ; en los demás casos,  $\Phi_I \neq \Phi_D$  pero están marcando que el punto  $P(x,y)$  no se ve doble cuando se fija la mirada sobre  $T$ . Con este preámbulo, Ogle desarrolló el siguiente cambio de coordenadas:

$$\beta = \arctg\left(\frac{dip}{2d}\right) \quad ; \quad \theta_I = \arctg\left(\frac{x + \frac{dip}{2}}{y}\right) \quad ; \quad \theta_D = \arctg\left(\frac{x - \frac{dip}{2}}{y}\right) \quad ; \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_I = \theta_I - \beta \\ \Phi_D = \theta_D + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow H = \frac{1}{\tan \Phi_I} - R_0 \frac{1}{\tan \Phi_D} \quad \text{y} \quad R = \frac{\tan \Phi_D}{\tan \Phi_I}$$

Reorganizando  $H$  en función de la nueva variable  $R$ , nos queda que:  $R = H \tan \Phi_D + R_0$ , la cual no es más que una recta de pendiente  $H$  y ordenada en el origen  $R_0$ .

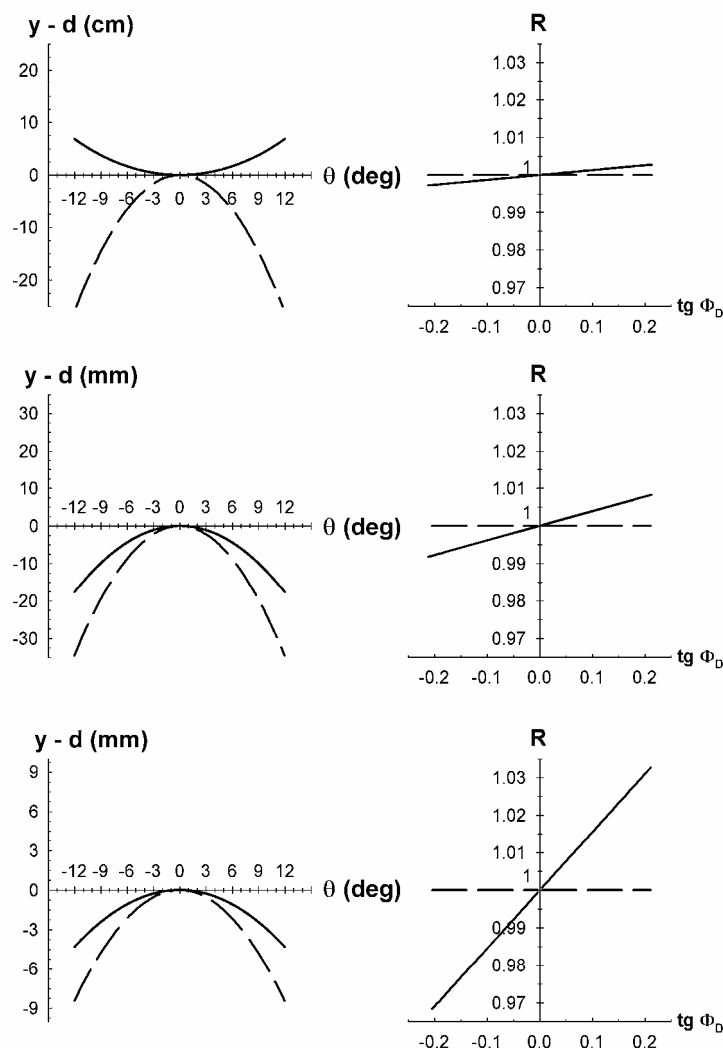


Figura 5: Formas del horóptero longitudinal según la distancia de fijación para un sujeto normal ( $R_0 = 1$ ). Izquierda (abajo-centro-arriba): representación gráfica típica,  $(y - d)$  vs.  $\theta$ , del horóptero longitudinal para varias distancias de fijación (20 cm, 80 cm y 6 m). La línea continua corresponde al horóptero empírico, mientras que la línea discontinua corresponde a la circunferencia de Vieth-Müller (CVM) asociada a cada distancia de fijación. Derecha: Representación analítica,  $R$  vs.  $\tan \Phi_D$ , de los mismos datos, donde se aprecia las rectas con pendientes ( $H$ ) diferentes asociadas a cada distancia de fijación.

Por tanto, si para cada dirección visual  $\theta$  representamos los puntos horóptero  $P(x,y)$  según el par de excentricidades retinianas ( $\Phi_I$ ,  $\Phi_D$ ) en una gráfica  $R$  vs.  $\tan \Phi_D$ , podremos ajustar mediante regresión lineal los datos experimentales y obtener  $H$  y  $R_0$  para el observador en

cuestión. Habitualmente, se intercambia  $\tan \Phi_D$  por  $\Phi_D$ , pero las conclusiones gráficas son siempre las mismas: si la distancia de fijación  $d$  varía,  $H$  varía (Fig. 5).

## **REALIZACIÓN PRÁCTICA:**

El instrumento utilizado para determinar el horóptero longitudinal –*horopter apparatus*– consta de siete varillas: una central de fijación y seis más que pueden ser desplazadas por el observador a lo largo de una serie de carriles, los cuales marcan respectivamente seis direcciones visuales diferentes  $\theta_i = 1, \dots, 6$  (Fig. 6). Los extremos de estas varillas y los extremos del fondo no deben ser visibles a fin de evitar la influencia de factores empíricos monoculares que puedan intervenir de manera significativa en los resultados obtenidos. Para ello, se coloca un diafragma rectangular de tamaño adecuado entre el observador y las varillas.

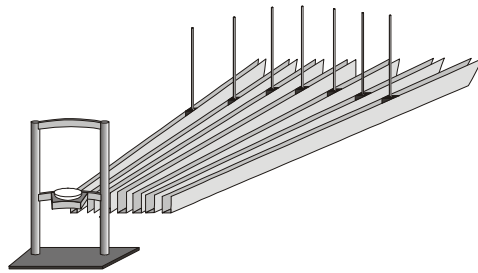


Figura 6: Esquema del *horopter apparatus*.

Hay varios métodos de obtención del horóptero longitudinal, de entre los cuales aplicaremos solamente uno:

### **1. Método del plano frontoparalelo aparente (PFPA)**

Es el método habitualmente utilizado ya que proporciona unos datos muy fiables, y además es el que menos entrenamiento requiere por parte del observador.



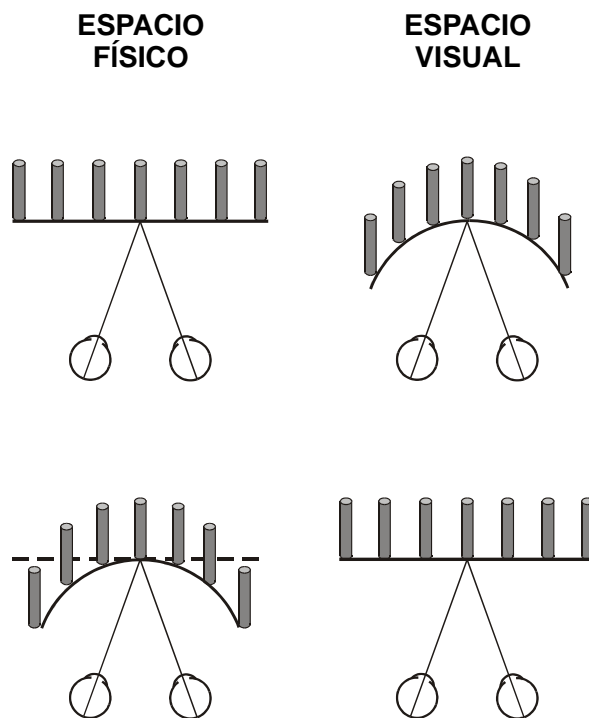


Figura 7: Diferencias entre el espacio visual y el espacio físico con el método PFPA del horóptero. Arriba: percepción curvada hacia dentro de las varillas, según el patrón de disparidades binoculares asociadas a las varillas, cuando realmente están alineadas o se encuentran en el plano frontoparalelo objetivo. Abajo: percepción a igual profundidad cuando realmente están curvadas hacia dentro, es decir, a distancias diferentes del plano frontal del observador.

El sujeto fija la mirada sobre la varilla central ( $F \equiv T$ ), y se le pide que sitúe todas las demás varillas a la misma distancia, de tal forma que se encuentren aparentemente todas ellas en un mismo plano frontal (Fig. 7). El observador puede reajustar la posición de las varillas las veces que considere necesario hasta conseguirlo. Por tanto, es adecuado denotar a esta lectura con la variable  $d_\theta$  [cm], con su correspondiente valor medio y error estadístico. Por otra parte, en la práctica surge otro gran inconveniente relacionado con la construcción del aparato. Como los carriles serán de cierto espesor, es imposible construir el aparato partiendo de la intersección inicial o punto de arranque de los mismos, por lo que el montaje parece que está parcialmente seccionado, quedando en el aire (sin montar) la parte inicial o más cercana al observador. Si  $d$  es la distancia de fijación a la varilla central (inmóvil), este valor se compondrá de dos partes: el valor medido en el carril central  $d_0$  ( $\theta = 0$ ) y el resto  $k$  en aire (Fig. 8). Ya que el sistema de coordenadas  $(x, y)$  se fija respecto la posición del ojo cíclope, una de las representaciones gráficas más comunes es utilizar la desviación  $(y - d)$  respecto el plano frontoparalelo objetivo (PFPO) en función de la dirección ciclópea  $\theta$  de cada carril del

aparato. Ahora bien, como las medidas tomadas en el aparato son  $d_0$  y  $d_\theta$ , es necesario transformarlas adecuadamente para calcular la desviación  $(y - d)$ . Teniendo en cuenta el valor  $k$  y la dirección  $\theta$  del carril, siempre conocidos, se obtiene que:

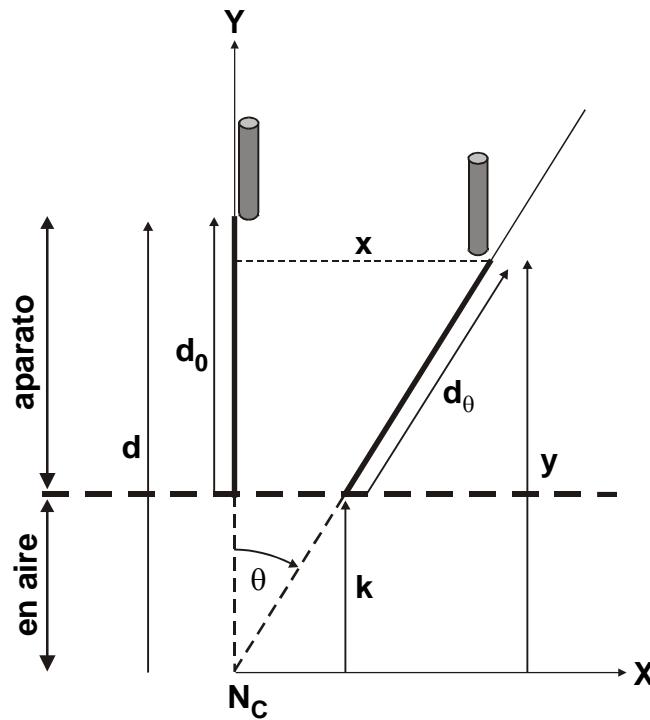


Figura 8: Esquema de apoyo para el cálculo de la desviación  $(y - d)$  de la varilla móvil del carril  $\theta$  respecto al plano frontoparalelo objetivo (PFPO) considerando que los carriles no se prolongan físicamente hasta su intersección, que es donde corresponde colocar los ojos.

$$\left. \begin{array}{l} d = d_0 + k \\ y = k + d_\theta \cos \theta \end{array} \right\} \Rightarrow y - d = d_\theta \cos \theta - d_0 \quad (3)$$

Una vez tabulados todos los valores correspondientes a cada carril, se procede a representar el horóptero empírico, pero incluyendo también como referencia la circunferencia de Vieth-Müller (CVM) como horóptero teórico. No se toman medidas, sino que debe calcularse directamente la desviación teórica  $(y_{CVM} - d)$  para cada dirección ciclópea  $\theta$ . Para ello, solamente se requiere de partida conocer las ecuaciones asociadas a la circunferencia de Vieth-Müller. Teniendo en cuenta el cambio general de variable  $x = y \cdot \tan \theta$ , común para cualquier tipo de horóptero, se introduce ésta en la ecuación de la circunferencia con la intención de despejar el valor  $y_{CVM}$ :

$$CVM \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

$$\text{con } x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{d^2 - \left(\frac{dip}{2}\right)^2}{2d}, \quad r = \sqrt{(y_0)^2 + \left(\frac{dip}{2}\right)^2} \quad (4)$$

$$\text{si } x = y \cdot \operatorname{tg} \theta \Rightarrow CVM \equiv (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) y^2 - 2y_0 y - \left(\frac{dip}{2}\right)^2 = 0$$

Por tanto, resolviendo la ecuación de 2º grado en  $y_{CVM} \equiv y$ , seleccionando la solución positiva, se llega a:

$$y_{CVM} = \frac{y_0 + \sqrt{r^2 + \left(\frac{dip}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta}}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \quad (5)$$

Tabulando, por tanto, el valor  $y_{CVM}$  en función de la dirección ciclópea  $\theta$ , y restándole posteriormente la distancia de fijación  $d$  de la varilla central, se obtiene la representación gráfica típica del CVM (Fig. 5, izquierda) para esa configuración experimental.

## **RESULTADOS**

1.- Rellena las tablas siguiente y representa los resultados medios obtenidos sobre una gráfica  $(y-d)[\text{mm}]$  vs.  $\theta[\text{deg}]$  incluyendo las barras estadísticas de error. Incluye en esta gráfica el círculo de Vieth-Müller (CVM) como referencia gráfica de la desviación de los datos respecto del resultado teórico previsto. Utiliza la plantilla preparada en la hoja EXCEL.

$d_0(\text{mm})$	$k(\text{mm})$	$y_0(\text{mm})$	$r(\text{mm})$	$d(\text{mm})$	$dip(\text{mm})$

$\theta (\text{deg})$	$d_\theta (\text{cm})$	$y (\text{cm})$	$x (\text{cm})$	$y - d (\text{mm})$	$y_{CVM} - d (\text{mm})$
-12,8					
-6,1					
-3,0					
0,0					
3,4					
6,2					
13,1					

2.- Rellena las tablas siguientes y aplica sobre otra gráfica, del tipo  $R$  vs.  $\text{tg } \Phi_D$ , un análisis de regresión lineal aplicando el cambio de variables de Ogle (1950) indicado anteriormente. Obtén para cada grupo de datos la desviación de Hering-Hillebrand  $H$  y el grado de aniseiconía  $R_0$ . Utiliza la plantilla EXCEL

$d_0(\text{mm})$	$k(\text{mm})$	$\beta(\text{deg})$	$\text{dip}(\text{mm})$

$\theta(\text{deg})$	$d_\theta(\text{cm})$	$y(\text{cm})$	$x(\text{cm})$	$\theta_i(\text{deg})$	$\theta_D(\text{deg})$	$\Phi_i(\text{deg})$	$\Phi_D(\text{deg})$	$R$	$R_{\text{CVM}}$
-12,8									
-6,1									
-3,0									
3,4									
6,2									
13,1									

## CUESTIONES

- 1) Deduce de la expresión general de la cónica el caso particular  $H = 0$  y  $R_0 = 1$  y demuestra que corresponde a una expresión de una circunferencia, es decir, al círculo de Vieth-Müller (CVM).
- 2) ¿Cuál es la distancia abática correspondiente para los datos experimentales?
- 3) ¿Cuál es la ecuación de la cónica asociada los datos experimentales?